Mathematik - Oberstufe
Wendepunkte einer Funktion

Neben Extrempunkten stellen Wendepunkte charakteristische Punkte eines Funktionsgraphen dar. Wendepunkte sind die Punkte eines Funktionsgraphen, in denen dieser sein Krümmungsverhalten ändert. Dabei kann ein Graph links- oder rechtsgekrümmt sein.

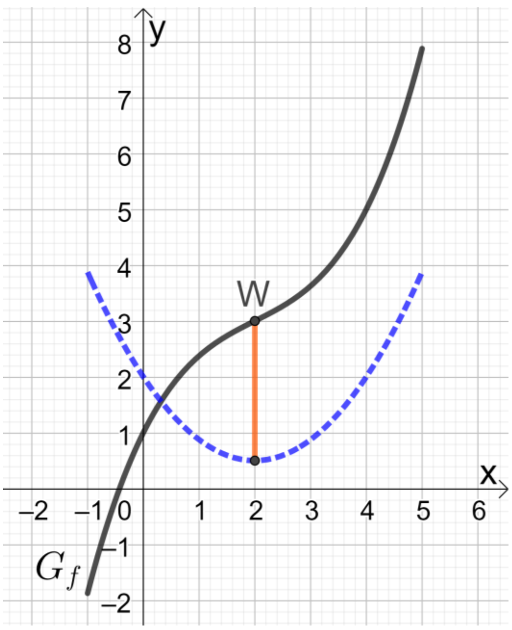

Abbildung 1: Wendepunkt Möglichkeit I

Abbildung 1 zeigt den Wendepunkt W eines Graphen G_f. Zunächst wollen wir klären, wie die Koordinaten eines Wendepunktes bestimmt werden können. In Abbildung 1 ist neben dem Graphen G_f und dessen Wendepunkt W auch der Graph der ersten Ableitung $G_{f'}$ der Funktion f dargestellt (blau gestrichelt). Es ist zu erkennen, dass der Graph der ersten Ableitung $G_{f'}$ einen lokalen Tiefpunkt genau dort hat, wo G_f einen Wendepunkt besitzt.

Abbildung 2 zeigt ebenso den Wendepunkt W eines Graphen G_f. Zudem ist auch in dieser Abbildung der Graph $G_{f'}$ der ersten Ableitung f' blau gestrichelt eingezeichnet. Es zeigt sich wiederum, dass der Wendepunkt W genau dort liegt, wo die erste Ableitung einen lokalen Extrempunkt besitzt. Hier allerdings einen lokalen Hochpunkt.

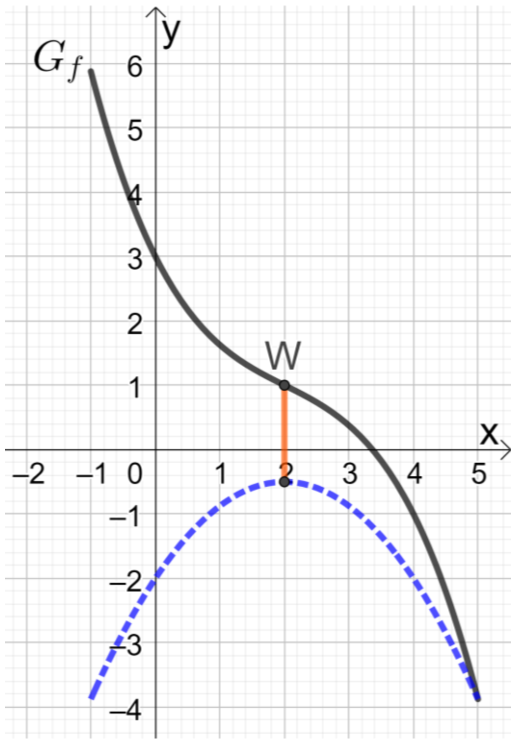

Abbildung 2: Wendepunkt Möglichkeit II

Wir halten fest: Ein Wendepunkt des Graphen G_f einer Funktion f liegt stets dort, wo die erste Ableitung der Funktion f ein lokales Extremum besitzt. Aus den Erkenntnissen über lokale Extrempunkte kann nun leicht gefolgert werden, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, so dass ein Graph G_f an einer Stelle x_W einen Wendepunkt besitzt. Da x_w dann lokaler Extrempunkt des Graphen der ersten Ableitung ist, gilt als notwendige Bedingung, dass die erste Ableitung der ersten Ableitung in x_w eine Nullstelle besitzen muss. Dabei ist die erste Ableitung der ersten Ableitung nichts anderes als die zweite Ableitung der Funktion f. Die **notwendige Bedingung** für einen Wendepunkt von G_f an der Stelle x_w ist somit:

$$f''(x_w) = 0$$

Hinreichend ist diese Bedingung allerdings nicht. In Analogie zur hinreichenden Bedingung für lokale Extrempunkte gilt nun als **hinreichende Bedingung** für einen Wendepunkt von G_f an der Stelle x_w:

$$f'''(x_w) \neq 0$$

Der Graph G_f hat dann im Punkt W mit den Koordinaten $W\left(x_w \middle| f(x_w)\right)$ einen Wendepunkt.

Wie kann das Krümmungsverhalten einer Funktion mit Hilfe des Wendepunktes beurteilt werden?

Schauen wir nochmals in Abbildung 1. Dort ist der Graph G_f bis zum Erreichen des Wendepunktes rechtsgekrümmt und nach dem Wendepunkt linksgekrümmt. Mathematisch bedeutet dies nichts anderes, als dass die Steigung des Graphen G_f bis zum Wendepunkt immer weiter abnimmt und nach dem Wendepunkt wieder zunimmt. Mit anderen Worten, die Steigung ist im Wendepunkt Minimal (zumindest lokal). Deshalb hat die Ableitung dort ihren lokalen Tiefpunkt. Verallgemeinert führt dies zu folgendem Satz: Das Krümmungsverhalten von G_f ändert sich an der Stelle x_W von rechtsgekrümmt zu linksgekrümmt, wenn die erste Ableitung f' ein lokales Minimum bei x_w besitzt. Wir sprechenden dann von einem Rechts-Links-Wendepunkt. Ein Rechts-Links-Wendepunkt liegt also genau dann vor, wenn gilt:

$$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) > 0$$

Die analoge Betrachtung von Abbildung 2 für dazu, dass ein Links-Rechts-Wendepunkt an einer Stelle x_w zu finden ist, für die gilt:

$$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_w) < 0$$

Was ist ein Sattelpunkt?

Ein Sattelpunkt, manchmal auch als Terrassenpunkt bezeichnet, ist ein besonderer Wendepunkt. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f, der im Punkt W einen Sattelpunkt besitzt. Offensichtlich ändert sich das Krümmungsverhalten im Punkt W von recht- in linksgekrümmt. Es liegt also ein Rechts-Links-Wendepunkt vor. Wodurch unterscheidet sich aber dieser Wendepunkt von dem in Abbildung 1?

Der Graph G_f der Abbildung 1 hat im Wendepunkt eine Steigung ungleich Null. Der Graph G_f in Abbildung 3 hingegen hat im Wendepunkt eine Steigung von Null. Genau dies ist der entscheidende Unterschied. Ein Wendepunkt, in dem der Graph einen Anstieg von Null besitzt, nennen wir ab sofort Sattelpunkt.

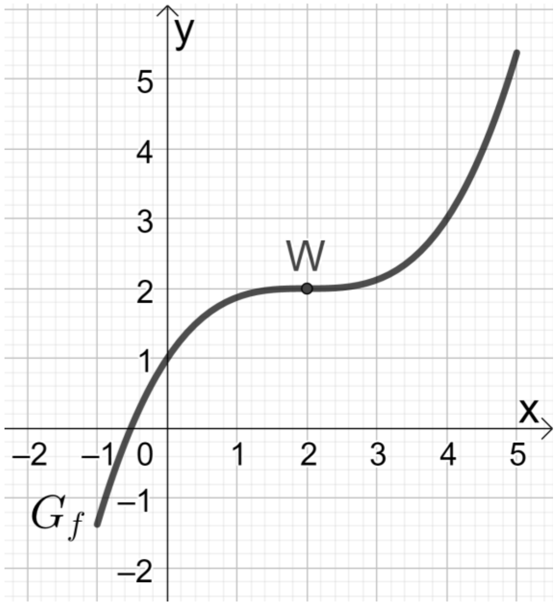

Abbildung 3: Sattelpunkt

Mathematisch lässt sich ein Sattelpunkt durch folgende Aussage beschreiben.

$$f'(x_w) = 0 \wedge f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

Beim Nachweis eines Sattelpunktes ist demnach zu beweisen, dass diese Aussage wahr ist.

Aufgabe: Beurteilen Sie folgende Aussage:

„Es existiert keine Funktion f die im Punkt A mit $A\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ einen Wendepunkt besitzt, wenn gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$.“