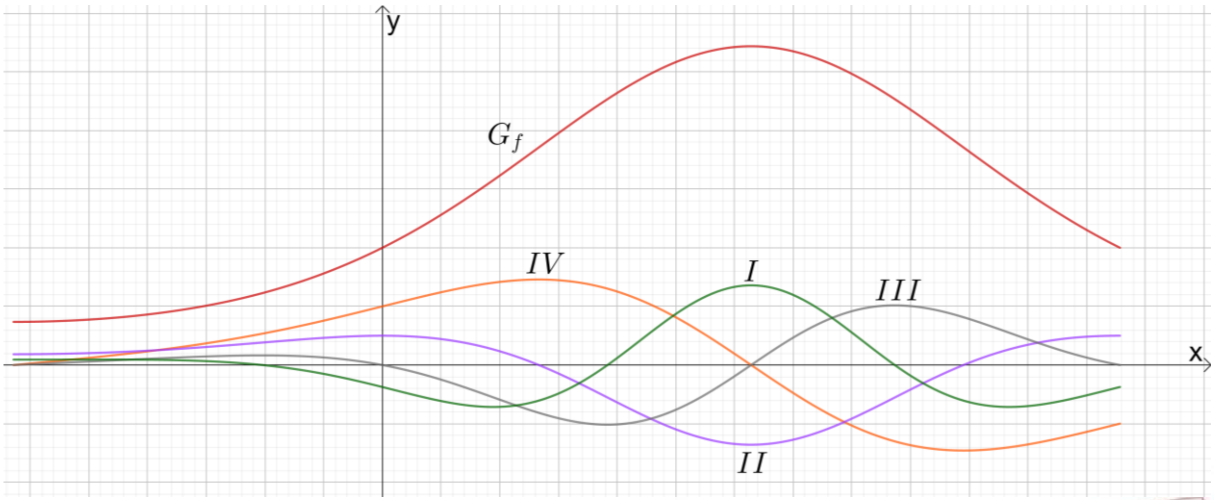
Mathematik - Oberstufe
Monotonieverhalten einer Funktion

Aufgabe 1: Geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktion an und untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.

(a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$
(b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$
(c) $f(x) = -x \cdot e^x$
(d) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$
(e) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$
(f) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
(g) $f(x) = e^{x^2} + \ln x$
(h) $f(x) = \frac{\ln(x+e+1)}{x+e+1} + 3$

Aufgabe 2: Der Graph der Funktion h werde mit G_h bezeichnet. Die Gleichung für die erste Ableitung der Funktion h sei durch $h'(x) = -\frac{1}{2}x^2 \cdot (x^2 - 1)(x - 2)(x + 3)$ gegeben. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen G_h im Intervall $I =]-2{,}10[$.

Aufgabe 3: Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f. Zudem sind die Graphen der Funktionen f', f'' und f''' dargestellt. Ordnen Sie jedem dieser Graphen die entsprechende Nummer aus der Abbildung zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.



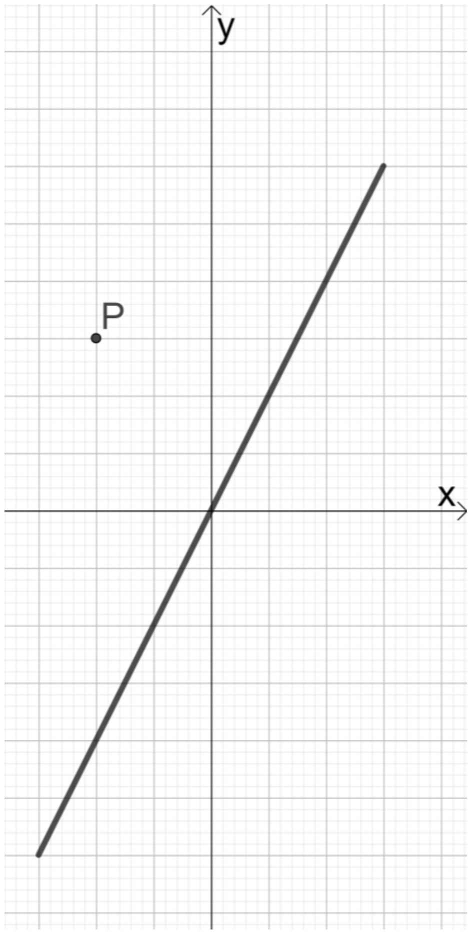
Aufgabe 4: Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Dabei beziehen sich die Aussagen stets auf ganzrationale Funktionen f.

Aussage 1: Angenommen, es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ stets $f'(a) < f'(b)$, dann kann bezüglich des Graphen der Funktion f gefolgert werden, dass dieser auf $\mathbb{R}$ monoton steigend verläuft.

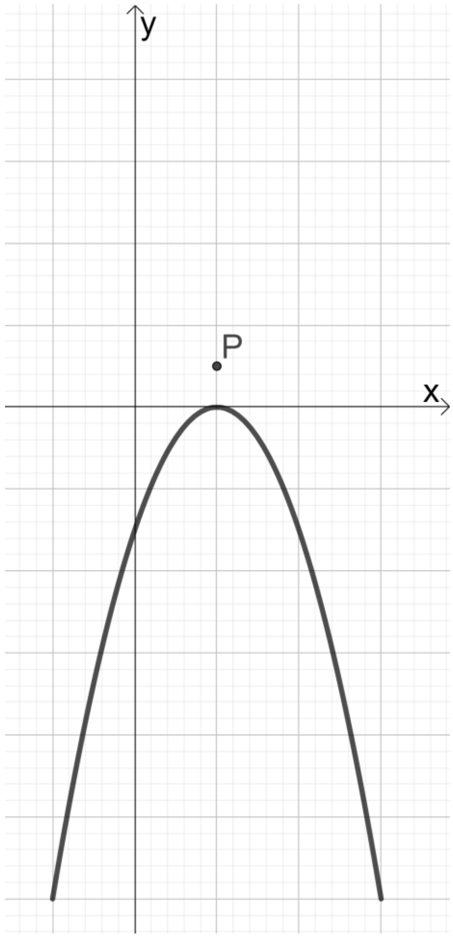
Aussage 2: Falls zwei Werte $a, b \in [x_1, x_2]$ existieren, für die gilt $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ so kann gefolgert werden, dass der Graph der Funktion f im Intervall $[x_1, x_2]$ mindestens eine Stelle mit waagerechter Tangente besitzt.

Aufgabe 5: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f, wobei der abgebildete Graph jeweils den Graphen der ersten Ableitung von f darstellt sowie der gekennzeichnete Punkt P zum Graphen der Funktion f gehört.

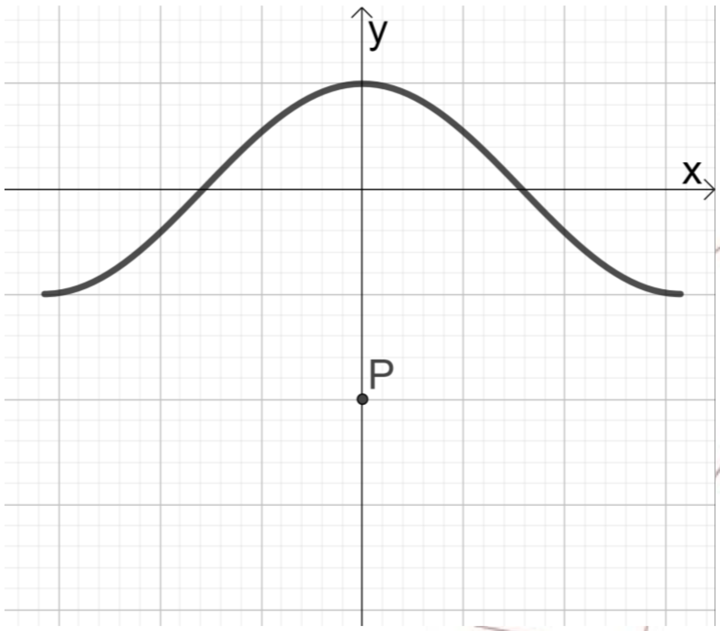
Aufgabenteil (a)



Aufgabenteil (b)



Aufgabenteil (c)



Aufgabe 1	Punkte	AFB		
		I	II	III

Aufgabenteil (a)

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

	$\left]-\infty; \frac{1}{4}\right[$	$\left]\frac{1}{4}; \infty\right[$
$f'(x_a)$	–	+
	fallend	steigend

Aufgabenteil (b)

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$0 = x^2 - x - 2$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 2$$

	$]-\infty; -1[$	$]-1; 2[$	$]2; \infty[$
$f'(x_a)$	+	–	+
	steigend	fallend	steigend

Aufgabenteil (c)

$$f'(x) = -e^x - xe^x = -e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

	$]-\infty; -1[$	$]-1; \infty[$
$f'(x_a)$	+	–
	Steigend	fallend

Aufgabenteil (d)

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)e^x = 0$$
$$0 = x^2 + 2x - 1$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1-\sqrt{2} \vee x_2 = -1+\sqrt{2}$$

	$]-\infty; -1-\sqrt{2}[$	$]x_1; x_2[$	$]\sqrt{2}-1; \infty[$
$f'(x_a)$	+	−	+
	steigend	fallend	steigend

Aufgabenteil (e)

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) = 0$$
$$0 = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$
$$\sin x = -\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-x - \frac{1}{2}\pi\right)$$
$$x = -x - \frac{1}{2}\pi$$
$$x = -\frac{1}{4}\pi$$
$$x_n = n \cdot \pi - \frac{1}{4}\pi$$

	---	$]x_0; x_1[$	$]x_1; x_2[$	…
$f'(x_a)$	---	+	−	…
	---	steigend	fallend	…

Aufgabenteil (f)

$$f'(x) = -\sin x + \cos x = 0$$
$$\sin x = \cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1$$
$$x_n = \frac{1}{4}\pi + n\pi$$

	---	$]x_0; x_1[$	$]x_1; x_2[$	…
$f'(x_a)$	---	−	+	…
	---	fallend	steigend	…

Aufgabenteil (g)

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\underbrace{2x^2e^{x^2}}_{>0} + 1 = 0$$

$$2x^2e^{x^2} + 1 > 0$$

	$]-\infty;\infty[$
$f'(x_a)$	+
	steigend

Aufgabenteil (h)

$$f'(x) = \frac{1}{(x+e+1)^2} - \frac{\ln(x+e+1)}{(x+e+1)^2} = \frac{1-\ln(x+e+1)}{(x+e+1)^2} = 0$$

$$0 = 1 - \ln(x+e+1)$$

$$1 = \ln(x+e+1)$$

$$e = x+e+1$$

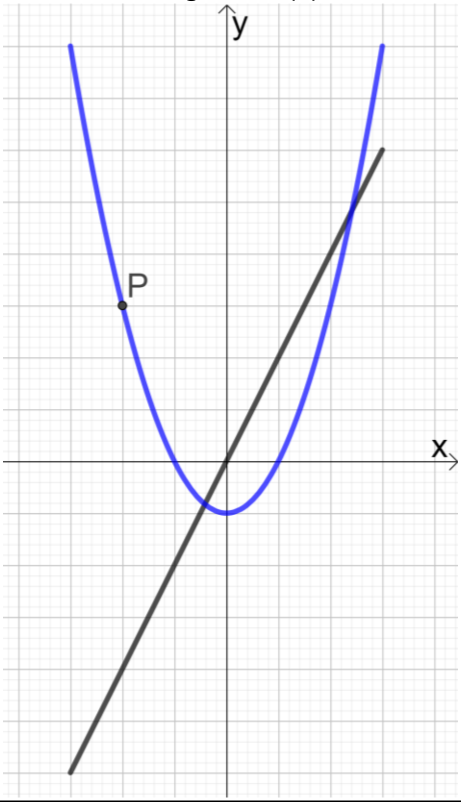
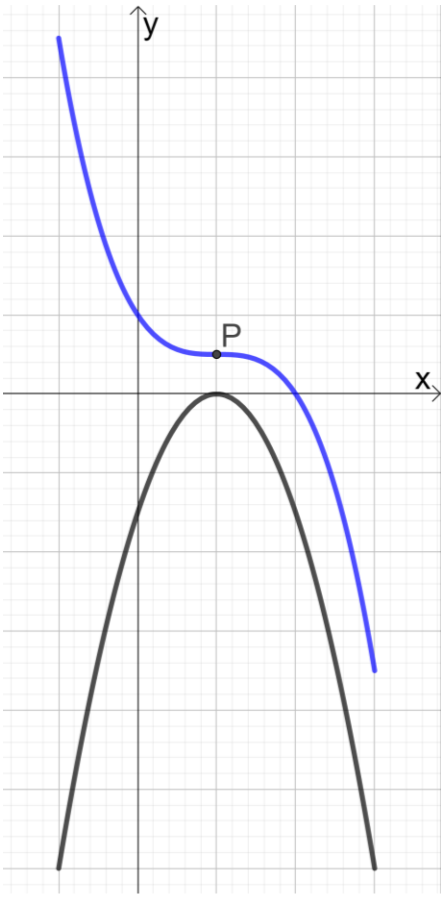
$$x = -1$$

	$]-\infty;-1[$	$]-1;\infty[$
$f'(x_a)$	+	−
	steigend	fallend

Aufgabe 2	Punkte	AFB		
		I	II	III
Nullsteller der ersten Ableitung: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$ Monotonieintervalle: Der Graph der Funktion verläuft im Intervall $I_1 =]-2; -1[$ monoton steigend, $I_2 =]-1; 0[$ monoton fallend, $I_3 =]0; 1[$ monoton fallend, $I_4 =]1; 2[$ monoton steigend, $I_5 =]2; 10[$ monoton fallend.				

Aufgabe 3	Punkte	AFB		
		I	II	III
Graph IV gehört zu $f'(x)$ Begründung, Graph IV hat an der Stellen, an der der Graph G_f eine waagerechte Tangente besitzt eine Nullstelle. Dadurch können die Graphen I und II ausgeschlossen werden. Da der Graph G_f zunächst monoton steigend verläuft, muss der Graph der ersten Ableitung in diesem Bereich oberhalb der x-Achse verlaufen. Die ist beim Graphen IV der Fall, nicht aber beim Graphen III.				
Graph II gehört zu $f''(x)$ Begründung: Ausschließlich Graph II hat an den Stellen Nullstellen, an denen der Graph der ersten Ableitung waagerechte Tangenten besitzt.				
Graph III gehört zu $f'''(x)$ Begründung: Ausschließlich Graph III besitzt an den Stellen Nullstellen, an denen der Graph der zweiten Ableitung waagerechte Tangenten besitzt.				

Aufgabe 4	Punkte	AFB		
		I	II	III
Aussage 1: falsch Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$ Für die Funktion f gilt stets $f'(a) < f'(b)$ wenn $a < b$, aber dennoch verläuft der Graph der Funktion f nicht monoton steigend im gesamten Definitionsbereich.				
Aussage 2: wahr Wenn $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ gilt, dann gilt entweder $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$ oder $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$. Somit ist beweisen, dass der Graph der Funktion $f'(x)$ an mindestens einer Stelle des Intervalls $[a, b]$ die x-Achse schneidet. Diese Stelle ist dann die Stelle, an der der Graph von f eine waagerechte Tangente besitzt.				

<table>
<tr><td rowspan="2">Aufgabe 5</td><td rowspan="2">Punkte</td><td colspan="3">AFB</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>Aufgabeteil (a)

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aufgabenteil (b)

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabenteil (c)