Wir haben bisher gezeigt, dass mithilfe der ersten Ableitung f' einer Funktion f der Anstieg des Graphen G_f an einer beliebigen Stelle x_0 bestimmt werden kann. Dies werden wir nun nutzen, um Bedingungen herzuleiten, die uns helfen werden, lokale Extrempunkte von Funktionsgraphen zu bestimmen.

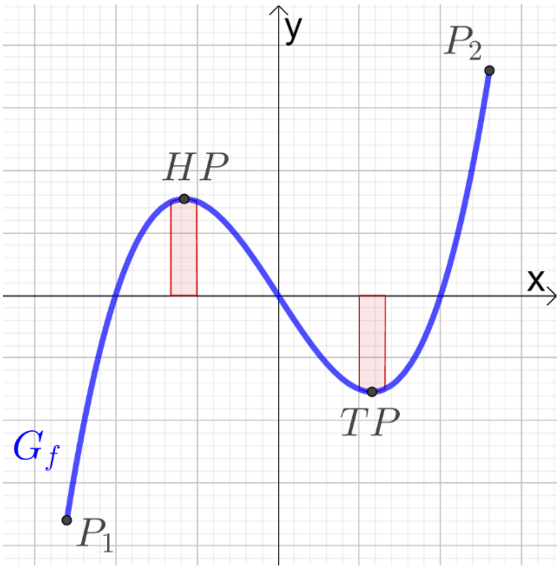

Abbildung 1: Extrema einer Funktion

Zunächst müssen wir aber klären, was wir unter Extrempunkt verstehen. Dazu betrachten wir Abbildung 1. Wir unterscheiden lokale und globale Extrempunkte. Der eingezeichnete Punkt HP ist ein lokaler Extrempunkt. Genauer ein lokaler Hochpunkt. In einer beliebig kleinen Umgebung (rot dargestellt) um diesen Punkt, existiert kein weiterer Punkt des Graphen G_f der oberhalb von HP liegt. Außerhalb dieser beliebig kleinen Umgebung gilt dies aber nicht mehr. So liegt der Punkt P_2 beispielsweise oberhalb von HP. Im betrachteten Intervall ist HP deshalb ein lokaler Extrempunkt (lokales Maximum; lokaler Hochpunkt) während P_2 in diesem Intervall globaler Extrempunkt (globales Maximum) ist, weil kein Punkt auf G_f im betrachteten Intervall oberhalb von P_2 liegt.

Die analoge Überlegung führt dazu, dass TP ein lokaler Tiefpunkt ist, während P_1 das globale Minimum des Graphen G_f im betrachteten Intervall darstellt. TP ist demnach lokaler Extrempunkt (lokales Minimum; lokaler Tiefpunkt); P_1 globaler Extrempunkt (globales Minimum).

Notwendige Bedingung dafür, dass der Graph G_f an einer Stelle x_E einen Extrempunkt besitzt.

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f einer weiteren Funktion f. Zudem ist gestrichelt der Graph $G_{f'}$ der ersten Ableitung f' dargestellt.

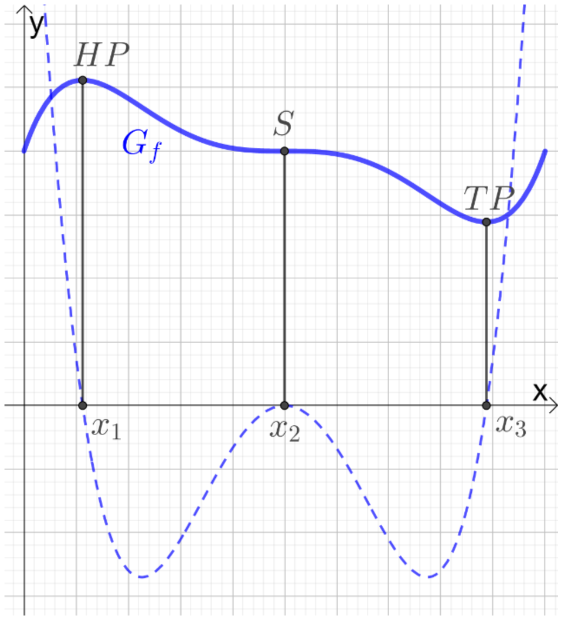

Abbildung 2: notwendige Bedingung für Extrema

Beim eingezeichneten Punkt HP handelt es sich um einen lokalen Hochpunkt; bei TP um einen lokalen Tiefpunkt. Der Punkt S ist weder lokaler Hoch- noch Tiefpunkt. In jeder noch so kleinen Umgebung um S, existieren Punkt auf G_f, die ober- oder unterhalb von S liegen.

Dennoch haben die drei Punkt HP, TP und S eine Gemeinsamkeit. Wenn man in diesen Punkten eine Tangente an den Graphen G_f legt, dann verläuft diese Tangente waagerecht.

Sie hat demnach jeweils einen Anstieg von Null. Weil die erste Ableitung f' Auskunft über den Anstieg des Graphen G_f an einer Stelle x_0 gibt, muss demnach die erste Ableitung dort Nullstellen besitzen, wo G_f eine waagerechte Tangente besitzt. Da dies bei lokalen Extremstellen stets der Fall ist, haben wir eine erste Bedingung, die erfüllt sein muss, um eine Extremstelle zu finden. Diese lautet:

$$f'(x_E) = 0$$

Alle Stellen x_E, die diese Gleichung lösen, sind potenziell Stellen, an denen G_f Extrempunkte besitzt. Wir sehen in Abbildung 2 aber auch, dass diese Bedingung nicht ausreicht. Schließlich gilt an der Stelle x_2 auch $f'(x_2) = 0$, aber dennoch hat G_f dort keinen lokalen Extrempunkt. Die gefundene Bedingung ist somit zwar **notwendig** für einen Extrempunkt, aber nicht **hinreichend**.

Hinreichende Bedingung dafür, dass der Graph G_f an einer Stelle x_E einen Extrempunkt besitzt.

Abbildung 3 zeigt weiterhin den Graphen G_f sowie die Nullstellen der ersten Ableitung x_1, x_2 und x_3. Gepunktet ist nun zudem der Graph der zweiten Ableitung f'' dargestellt.

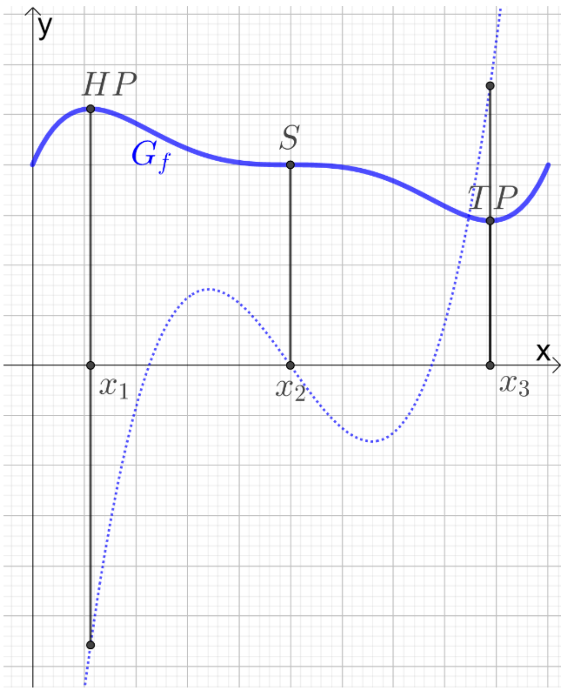

Abbildung 3: hinreichende Bedingung für Extrema

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle x_1 negativ ist ($f''(x_1) < 0$). An der Stelle x_1 befand sich ein lokaler Hochpunkt des Graphen G_f. Dieser Zusammenhang ist hinreichend für den Nachweis eines lokalen Hochpunktes. Es gilt also:

$$\underbrace{f'(x_E) = 0}_{(1)} \land \underbrace{f''(x_E) < 0}_{(2)} \Leftrightarrow HP(x_E|f(x_E))$$

Zudem kann der Abbildung entnommen werden, dass der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle x_3 positiv ist ($f''(x_3) > 0$). An der Stelle x_3 befand sich ein lokaler Tiefpunkt des Graphen G_f. Dieser Zusammenhang wiederum ist hinreichend für den Nachweis eines lokalen Tiefpunktes. Es gilt:

$$\underbrace{f'(x_E) = 0}_{(1)} \land \underbrace{f''(x_E) > 0}_{(2)} \Leftrightarrow TP(x_E|f(x_E))$$

Dabei heißt die mit (1) gekennzeichnete Gleichung **notwendige Bedingung** für Extrempunkte und die mit (2) gekennzeichnete Gleichung **hinreichende Bedingung** für Extrempunkte.

Warum lässt sich aus $f''(x_E) < 0$ folgern, dass an der Stelle x_E ein lokaler Hochpunkt liegt?

Aus $f''(x_E) < 0$ kann gefolgert werden, dass der Graph der ersten Ableitung an der Stelle x_E streng monoton fallend verläuft. D.h., die Funktionswerte der ersten Ableitung sind im Intervall $]x_E - \varepsilon; x_E[$ für hinreichende kleine Werte ε mit $\varepsilon > 0$ stets positiv und im Intervall $]x_E; x_E + \varepsilon[$ für hinreichende kleine Werte ε mit $\varepsilon > 0$ stets negativ. Dies wiederum bedeutet, dass der Graph G_f unmittelbar vor Erreichen des lokalen Extrempunktes streng monoton steigt und unmittelbar nach Erreichen streng monoton fällt. Damit ist bewiesen, dass dieser Extrempunkt ein Hochpunkt ist.

Leiten Sie aus dieser Erklärung ab, weshalb aus $f''(x_E) > 0$ gefolgert werden kann, dass an der Stelle x_E ein lokaler Tiefpunkt liegt.