Aufgabe: Untersuchen Sie den Graphen $G_f$ der Funktion $f$ mit $f(x) = 1 - x^2 \cdot e^{x^2}$ auf Art und Lage lokaler Extrempunkte.

Lösung:

Schritt 1: Bilden der ersten zwei Ableitungen

$$f'(x) = -2xe^{x^2} - 2x \cdot x^2e^{x^2} = -2xe^{x^2}(1 + x^2)$$

$$u = -2xe^{x^2} \Rightarrow u' = -2e^{x^2} - 2x \cdot 2xe^{x^2} = -2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2}$$

$$v = 1 + x^2 \Rightarrow v' = 2x$$

$$f''(x) = (1 + x^2)\left(-2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2}\right) - 2xe^{x^2} \cdot 2x$$

$$f''(x) = -2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} - 4x^4e^{x^2} - 4x^2e^{x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{x^2} - 10x^2e^{x^2} - 4x^4e^{x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{x^2}(1 + 5x^2 + 2x^4)$$

Schritt 2: notwendige Bedingung für Extrempunkte prüfen

$$f'(x) = -2xe^{x^2}(1 + x^2) = 0$$

$$0 = -2xe^{x^2}$$

$$x_1 = 0$$

$$0 = 1 + x^2$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Schritt 3: hinreichende Bedingung für Extrempunkte prüfen

$$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow HP(0|f(0))$$

Schritt 4: Koordinaten der Extrempunkte bestimmen

$$f(0) = 1 - 0^2 \cdot e^{0^2} = 1 \Rightarrow HP(0|1)$$