Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x$. Der Graph der Funktion f werde mit G_f bezeichnet.

(a) Ermitteln Sie das Verhalten des Graphen G_f für $x \to \pm\infty$.
(b) Bestimmen Sie alle Achsenschnittpunkt von G_f.
(c) Ermitteln Sie einen Term für die Funktion t, die den Graphen G_f im Koordinatenursprung berührt sowie den Term der Funktion n, die den Graphen G_f im Koordinatenursprung senkrecht schneidet.
(d) Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte des Graphen G_f. Entscheiden Sie, ob die lokalen Extrempunkte zugleich globale Extrema darstellen. Skizzieren Sie den Graphen G_f im Intervall $I = [-4; 5{,}5]$. Beurteilen Sie das Monotonieverhalten von G_f im Intervall I.
(e) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem Sie zeigen können, dass der Graph G_f zum Punkt $P\left(\frac{1}{2}\middle|f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ punktsymmetrisch ist.
(f) Beurteilen Sie folgende Aussage: „Der Graph G_f hat an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ das stärkste Gefälle.“

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{6}x^3$. Der Graph dieser Funktion werde mit K bezeichnet.

(a) Weisen Sie nach, dass K punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems verläuft.
(b) Zeigen Sie, dass K im Intervall $[2; 3]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Begründen Sie, weshalb K dann auch im Intervall $[-3; -2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
(c) Der Graph K besitzt genau zwei lokale Extrempunkte. Bestimmen Sie Art und Lage dieser lokalen Extrempunkte. Geben Sie ein möglichst kleines geschlossenes Intervall mit ganzzahligen Intervallgrenzen an, dass diese beiden lokalen Extrema enthält, in dem diese lokalen Extrema aber nicht mehr globale Extrema sind.
(d) Skizzieren Sie K im Intervall $-3 \leq x \leq 3$.
(e) Begründen Sie, weshalb der Graph K im Intervall $]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$ monoton steigend, nicht aber streng monoton steigend verläuft.
(f) Zeigen Sie, dass die Gerade g, die die lokalen Extrempunkte von K enthält auch den Koordinatenursprung enthält. Entscheiden Sie, ob es eine Tangente t an K gibt, die den gleichen Anstieg besitzt wie g.
(g) Beurteilen Sie folgende Aussage: „Die Gerade g schließt mit dem Graphen K im ersten Quadranten eine Fläche ein, deren Flächeninhalt kleiner als $\frac{\sqrt{5^4}}{3}$ Flächeneinheiten ist.“
(h) Die Funktion h ist eine abschnittsweise definierte Funktion der Form $h(x) = \begin{cases} h_L(x) & für\ x < -\sqrt{5} \\ f(x) & für -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ h_R(x) & für\ x > \sqrt{5} \end{cases}$. Geben Sie jeweils einen Funktionsterm für h_L und h_R an, so dass der Funktionsgraph von h ohne Knick und zudem für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton steigend verläuft.