Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{6}x^2-2x$. Der Graph der Funktion f werde mit G_f bezeichnet.

(a) Ermitteln Sie das Verhalten des Graphen G_f für $x \to \pm\infty$.

(b) Bestimmen Sie alle Achsenschnittpunkt von G_f.

(c) Ermitteln Sie einen Term für die Funktion t, die den Graphen G_f im Koordinatenursprung berührt sowie den Term der Funktion n, die den Graphen G_f im Koordinatenursprung senkrecht schneidet.

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte des Graphen G_f. Entscheiden Sie, ob die lokalen Extrempunkte zugleich globale Extrema darstellen. Skizzieren Sie den Graphen G_f im Intervall $I=[-4;5{,}5]$. Beurteilen Sie das Monotonieverhalten von G_f im Intervall I.

(e) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem Sie zeigen können, dass der Graph G_f zum Punkt $P\left(\frac{1}{2}\middle|f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ punktsymmetrisch ist.

(f) Beurteilen Sie folgende Aussage: „Der Graph G_f hat an der Stelle $x_0=\frac{1}{2}$ das stärkste Gefälle.“

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{10}x^5+\frac{5}{6}x^3$. Der Graph dieser Funktion werde mit K bezeichnet.

(a) Weisen Sie nach, dass K punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

(b) Zeigen Sie, dass K im Intervall $[2;3]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Begründen Sie, weshalb K dann auch im Intervall $[-3;-2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(c) Der Graph K besitzt genau zwei lokale Extrempunkte. Bestimmen Sie Art und Lage dieser lokalen Extrempunkte. Geben Sie ein möglichst kleines geschlossenes Intervall mit ganzzahligen Intervallgrenzen an, dass diese beiden lokalen Extrema enthält, in dem diese lokalen Extrema aber nicht mehr globale Extrema sind.

(d) Skizzieren Sie K im Intervall $-3 \leq x \leq 3$.

(e) Begründen Sie, weshalb der Graph K im Intervall $]-\sqrt{5};\sqrt{5}[$ monoton steigend, nicht aber streng monoton steigend verläuft.

(f) Zeigen Sie, dass die Gerade g, die die lokalen Extrempunkte von K enthält auch den Koordinatenursprung enthält. Entscheiden Sie, ob es eine Tangente t an K gibt, die den gleichen Anstieg besitzt wie g.

(g) Beurteilen Sie folgende Aussage: „Die Gerade g schließt mit dem Graphen K im ersten Quadranten eine Fläche ein, deren Flächeninhalt kleiner als $\frac{\sqrt{5^4}}{3}$ Flächeneinheiten ist.“

(h) Die Funktion h ist eine abschnittsweise definierte Funktion der Form $h(x)=\begin{cases} h_L(x) & für\ x<-\sqrt{5} \\ f(x) & für -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ h_R(x) & für\ x>\sqrt{5} \end{cases}$. Geben Sie jeweils einen Funktionsterm für h_L und h_R an, so dass der Funktionsgraph von h ohne Knick und zudem für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton steigend verläuft.

Aufgabe 1	Punkte	AFB		
		I	II	III
Aufgabenteil a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$				
Aufgabenteil b Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0\|0)$ Schnittpunkt(e) mir der x-Achse: $0 = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x = \frac{1}{9}x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 18\right)$ $x_1 = 0$ $0 = x^2 - \frac{3}{2}x - 18$ $x_{2,3} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 18}$ $x_2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{297}{16}} \approx -3{,}56$ $x_3 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{297}{16}} \approx 5{,}06$ $S_{x_2}(-3{,}56\|0)$ $S_{x_3}(5{,}06\|0)$				
Aufgabenteil c Ableitung der Funktion f: $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$ Anstieg im Ursprung: $f'(0) = -2 = m_t$ Tangentialpunkt: $P(0\|0)$ Ansatz für Tangente: $t: y = m_t \cdot x + n$ $0 = -2 \cdot 0 + n \Leftrightarrow n = 0$ Tangente: $t: y = -2x$ Normale: $n: y = \frac{1}{2}x$				
Aufgabenteil d Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$ $f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$				

Notwendige Bedingung für Extrema:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$$

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

Hinreichende Bedingung für Extrema:

$$f''(x_1) = f''(-2) = -\frac{5}{3} < 0 \Rightarrow HP\big(-2\big|f(-2)\big)$$

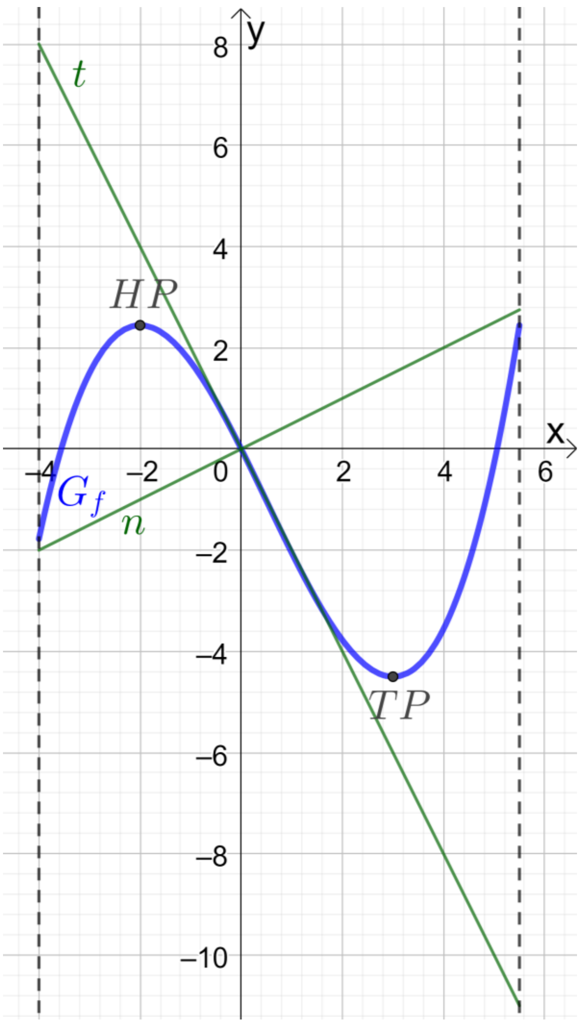
$$f''(x_1) = f''(3) = \frac{5}{3} > 0 \Rightarrow TP\big(3\big|f(3)\big)$$

Koordinaten der Extrempunkte:

$$f(-2) = -\frac{8}{9} - \frac{2}{3} + 4 = \frac{22}{9} \approx 2{,}44 \Rightarrow HP(-2|2{,}44)$$

$$f(-2) = 3 - \frac{3}{2} - 6 = \frac{22}{9} = 4{,}5 \Rightarrow TP(3|4{,}5)$$

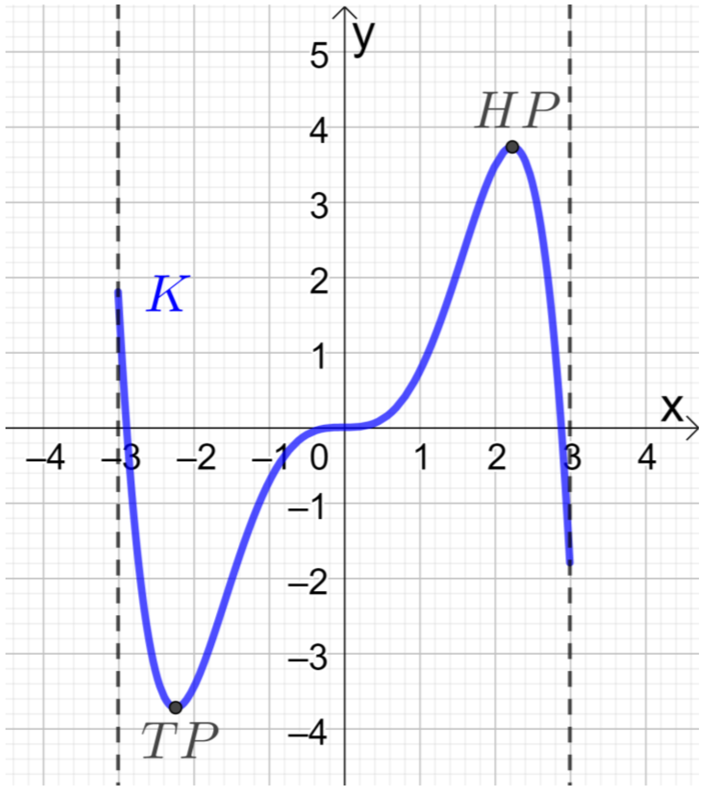
Graphische Darstellung:

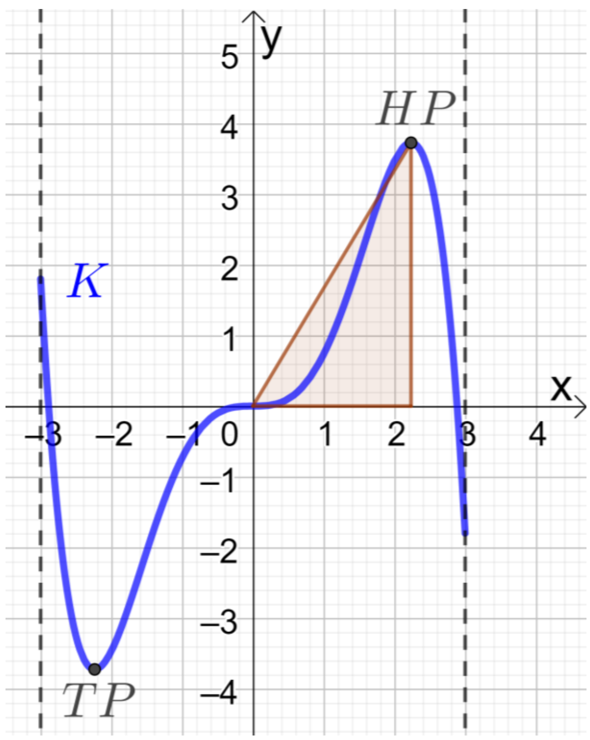


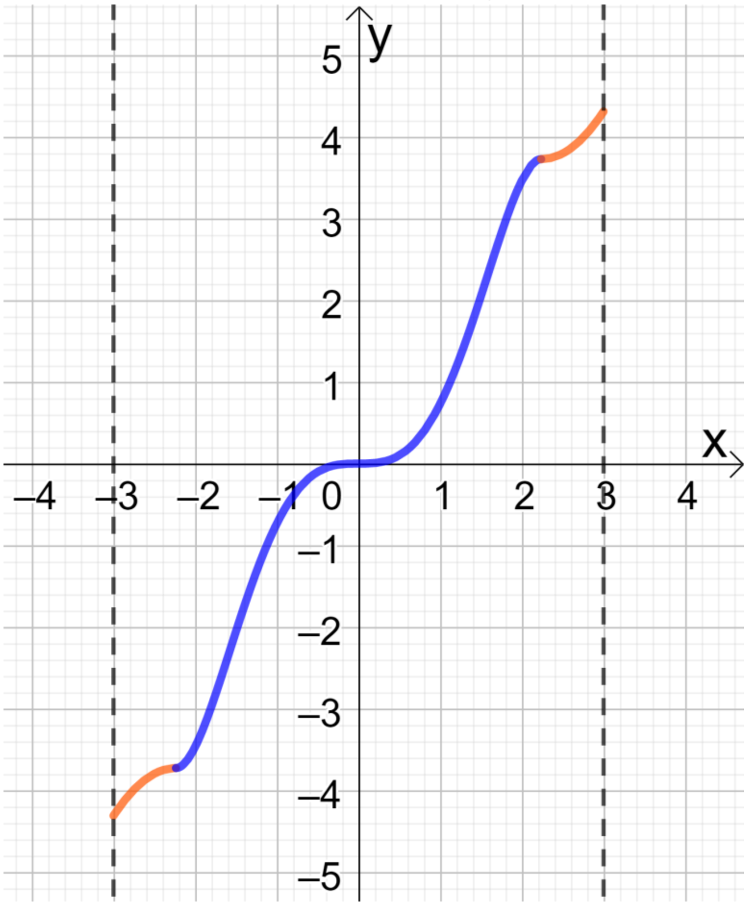
Die lokalen Extrempunkte sind keine globalen Extrempunkte. Dies kann bereits aus dem Grenzwertverhalten aus Aufgabenteil (a) gefolgert werden. Monotonieintervalle: $I_1 =]-\infty; -2[$ → monoton steigend $I_2 =]-2; 3[$ → monoton fallend $I_1 =]3; \infty[$ → monoton steigend				
Aufgabenteil e Der Graph ist zu P punktsymmetrisch, wenn der Graph der Funktion g mit $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ symmetrisch zum Ursprung ist. Dementsprechend kann die gesuchte Symmetrie dadurch bewiesen werden, dass man zeigt, dass die folgende Gleichung zu einer allgemein wahren Aussage führt. $g(x) = -g(-x)$ $f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-x + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$				
Aufgabenteil f Wenn an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ das Gefälle am stärksten ist, dann muss bei $x_0 = \frac{1}{2}$ ein Tiefpunkt der ersten Ableitung liegen. Dies wollen wir beweisen: $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ $f'''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow Minimum$ Da die erste Ableitung eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist das lokale Minimum zeitgleich globales Minimum. Die Aussage ist somit wahr.				

Aufgabe 2	Punkte	AFB		
		I	II	III
Aufgabenteil a $-f(x) = f(-x)$ $\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 = -\frac{1}{10}(-x)^5 + \frac{5}{6}(-x)^3$ $\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3$ $w.A.$				
Aufgabenteil b $f(2) \cdot f(3) = \frac{52}{15} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{156}{25} = -6{,}24 < 0$ Da die Funktion f stetig ist, muss K wegen $f(2) \cdot f(3) < 0$ mindestens eine Nullstelle besitzen. (Zwischenwertsatz)				

Aufgrund der punktsymmetrie zum Ursprung müssen gilt für alle Nullstellen x_i mit $i \in \mathbb{N}$ stets, dass auch $-x_i$ Nullstelle ist.				
Aufgabenteil c Ableitungen $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2$ $f''(x) = -2x^3 + 5x$ Notwendige Bedingung für Extrema: $f'(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2(x^2 - 5)$ $x_{1,2} = 0$ $x_3 = -\sqrt{5}$ $x_4 = \sqrt{5}$ Hinreichende Bedingung für Extrema: $f''(0) = 0 \Rightarrow kein\ Extrempunkt$ $f''(-\sqrt{5}) = 5\sqrt{5} > 0 \Rightarrow TP(-\sqrt{5} \mid f(-\sqrt{5}))$ $f''(\sqrt{5}) = -5\sqrt{5} < 0 \Rightarrow HP(\sqrt{5} \mid f(\sqrt{5}))$ Koordinaten der Extrempunkte: $f(-\sqrt{5}) \approx -\frac{\sqrt{5^3}}{3} \Rightarrow TP\left(-\sqrt{5} \middle\vert -\frac{\sqrt{5^3}}{3}\right) \Rightarrow TP(-2{,}24 \mid -3{,}73)$ $f(\sqrt{5}) \approx \frac{\sqrt{5^3}}{3} \Rightarrow HP\left(\sqrt{5} \middle\vert \frac{\sqrt{5^3}}{3}\right) \Rightarrow HP(2{,}24 \mid 3{,}73)$ Möglichst kleines Intervall: $I = [-4; 4]$ Begründung: $f(-4) > 3{,}73 > f(-3)$ bzw. $f(4) < -3{,}73 < f(3)$				

<table>
<tr><td>Aufgabenteil d

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aufgabenteil e
Wenn ein Graph streng monoton steigend in einem Intervall $I =]a; b[$ verläuft, dann gilt für alle $x \in I$ stets $f'(x) > 0;$ sollte lediglich $f'(x) \geq 0$ gelten, dann ist der Graph lediglich monoton steigend.
Im vorliegenden Fall gilt wegen $f'(0) = 0$ für alle Werte $x \in \left]-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right[$ der Fall $f'(x) \geq 0$, nicht aber $f'(x) > 0$. Somit ist der Graph monoton steigend, nicht aber streng monoton steigend.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aufgabenteil f
Anstieg der Gerade g:
$$m_g = \frac{\frac{\sqrt{5^3}}{3} + \frac{\sqrt{5^3}}{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5^3}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3}$$
Ansatz für Gerade g:
$$g: y = \frac{5}{3}x + n$$
$$\frac{\sqrt{5^3}}{3} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{5} + n \Leftrightarrow n = 0$$
Gleichung für Gerade g:
$$g: y = \frac{5}{3}x$$
Offensichtlich gilt: $0 = \frac{5}{3} \cdot 0 \Rightarrow (0|0) \in g$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Gibt es eine Tangente an K mit dem Anstieg von g? Stelle kann über Lösung der Gleichung $f'(x)=\frac{5}{3}$ gefunden werden. $-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2=\frac{5}{3}$ $0=\underbrace{\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{3}}_{d(x)}$ Es gilt: $d(0)\cdot d(1)=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{9}<0$ Somit existiert die gesuchte Stelle beispielsweise im Intervall $]0;1[$.				
Aufgabenteil (g) Offensichtlich gilt: $A<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5^3}}{3}=\frac{\sqrt{5^4}}{6}<\frac{\sqrt{5^4}}{3}$  Die Aussage ist somit wahr.				

<table>
<tr><td>Aufgabenteil h
$$h_L = -(x+\sqrt{5})^2 - \frac{\sqrt{5^3}}{3}$$
$$h_R = (x-\sqrt{5})^2 + \frac{\sqrt{5^3}}{3}$$

</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>