Wurzeln

Gesetze und Anwendungen

Was ich über Wurzeln wissen muss!

- Die Wurzelrechnung (Radizieren) ist die Umkehrung des Potenzierens.

$$a^n = b \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b}$$

Dabei wird b als Radikant, n als Wurzelexponent, $\sqrt[n]{b}$ als Wurzel und a als Wurzelwert bezeichnet.

- Eine n-te Wurzel kann für jeden nicht negativen Radikanden b berechnet werden.
- Eine Wurzel kann für negative Zahlen nur für ungerade Wurzelexponenten berechnet werden.

Was ich über Wurzeln wissen muss!

- Wurzelrechnungen können als Potenzrechnungen mit gebrochenem Exponenten betrachtet werden. Es gelten somit die Potenzgesetze in Übertragung auch für die Wurzelrechnung.
- Es gilt:

$$\sqrt[2]{b} = \sqrt{b}$$

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$$

Was ich über Wurzeln wissen muss!

- Wurzelgesetze (in Analogie zu den Potenzgesetzen):

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \Rightarrow \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{24}} = \sqrt[4]{\frac{8}{24}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Was ich über Wurzeln wissen muss!

- Wurzelgesetze (in Analogie zu den Potenzgesetzen):

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a}^{\,m} \Rightarrow \sqrt[10]{x^7} = \sqrt[10]{x}^{\,7}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k\cdot m}{k\cdot n}} = \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}} \Rightarrow \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[2\cdot 3]{5^{2\cdot 4}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \Rightarrow \sqrt[4]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[20]{8}$$

Was ich über Wurzeln wissen muss!

- FOLGENDE AUSSAGEN GELTEN IM ALLGEMEINEN **NICHT.**

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b \Rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 7$$

Beispiel: Schreiben Sie die Terme in Wurzeln um.

- $10^{\frac{1}{2}}$
- $4^{\frac{5}{3}}$
- $(a+b)^{-\frac{1}{4}}$

Beispiel: Schreiben Sie die Terme in Wurzeln um.

- $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$
- $4^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4^5}$
- $(a + b)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a+b}}$

Beispiel: Schreiben Sie als Potenz mit rationalem Exponenten.

- $\sqrt{7}$
- $\sqrt[3]{27}$
- $\sqrt[10]{a^{10} - z^{10}}$
- $\frac{4}{\sqrt[a]{b}}$

Beispiel: Schreiben Sie als Potenz mit rationalem Exponenten.

- $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[10]{a^{10} - z^{10}} = (a^{10} - z^{10})^{\frac{1}{10}}$
- $\frac{4}{\sqrt[a]{b}} = \frac{4}{b^{\frac{1}{a}}} = 4b^{-\frac{1}{a}}$

Beispiel: Vereinfachen Sie weitestgehend.

- $\sqrt[6]{5^4}$
- $\sqrt[6k]{j^{12k \cdot h}}$
- $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{x^{30}}}}$

Beispiel: Vereinfachen Sie weitestgehend.

- $\sqrt[6]{5^4} = 5^{\frac{4}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$
- $\sqrt[6k\cdot h]{j^{12k}} = j^{\frac{12k}{6k\cdot h}} = j^{\frac{2}{h}} = \sqrt[h]{j^2}$
- $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{x^{30}}}} = \left(\left(\left(x^{30}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{30\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = x^{\frac{30}{30}} = x$

!!! VIEL ERFOLG BEIM WEITERLERNEN !!!