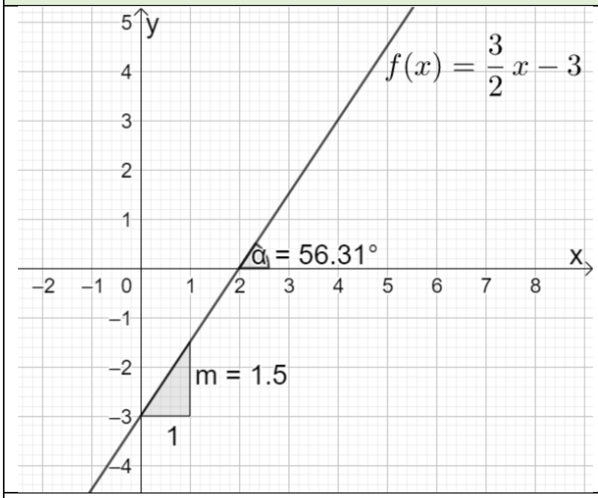
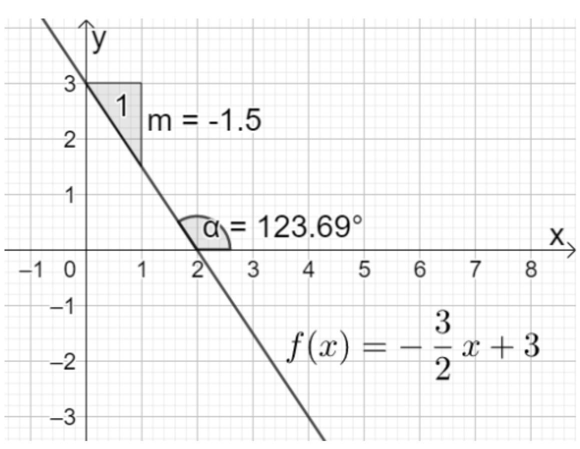
Berufliches Gymnasium
Monotonieverhalten einer Funktion

Lineare Funktonen $y = f(x) = m \cdot x + n$ sind Funktionen deren Graphen keinerlei Krümmung aufweisen. Verantwortlich dafür ist der konstante Anstieg $m = \tan\alpha$. Dabei ist α der Winkel, den der Graph von f mit der positiv gerichteten x-Achse einschließt.

erster Fall	zweiter Fall
	
Allgemein gilt: Wenn $0° < \alpha < 90°$ bzw. $0 < m < \infty$, dann steigt der Graph der Funktion f. Das heißt, mit steigenden Funktionsargumenten x steigen auch die Funktionswerte$y = f(x)$.	Allgemein gilt: Wenn $90° < \alpha < 180°$ bzw. $-\infty < m < 0$, dann fällt der Graph der Funktion f. Das heißt, mit fallenden Funktionsargumenten x fallen auch die Funktionswerte$y = f(x)$.

In beiden beschriebenen Fällen spricht man von einer monotonen Funktion. Im ersten Fall liegt eine **monoton steigende Funktion** $(m > 0)$; im zweiten Fall eine **monoton fallende Funktion** $(m < 0)$ vor.

Der Begriff der Monotonie lässt sich auf Funktionen verallgemeinern, deren Kurvenverlauf gekrümmt ist. Wir werden sagen, dass eine Funktion f deren Graph gekrümmt ist, monoton steigt, wenn der Anstieg der Tangente an den Graphen von f einen positiven Anstieg besitzt bzw. monoton fällt, wenn der Anstieg der Tangente an den Graphen von f negativ ist.

MERKE: Es besteht folgender Zusammenhang zwischen Tangentenanstieg m_t und der Monotonie:

$m_t > 0 \Leftrightarrow$ Kurve verläuft monoton steigend

$m_t < 0 \Leftrightarrow$ Kurve verläuft monoton fallend

Da die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 als Anstieg der Tangente an f an diese Stelle interpretiert werden kann, lässt sich mithilfe der Ableitungsfunktion der Funktion f das Monotonieverhalten dieser Funktion ermitteln. Diese Überlegung führt zum folgenden Monotoniekriterium:

Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) Wenn $f(x)$ im Intervall I monoton steigt, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

(Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, dann ist $f(x)$ im Intervall I monoton steigend.)

Wenn $f(x)$ im Intervall I monoton fällt, dann gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

(Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, dann ist $f(x)$ im Intervall I monoton fallend.)

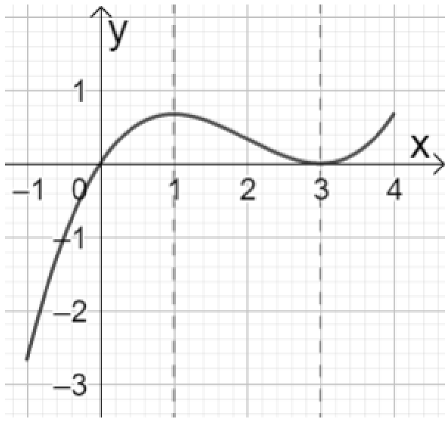
(2) Wenn $f(x)$ im Intervall I streng monoton steigt, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

(Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist $f(x)$ im Intervall I streng monoton steigend.)

Wenn $f(x)$ im Intervall I streng monoton fällt, dann gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

(Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist $f(x)$ im Intervall I streng monoton fallend.)

Beispielaufgabe: Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ an. Der Graph der Funktion f ist in nebenstehender Abbildung dargestellt.



Lösung:

Die Funktion f ist im Intervall $I_1 =]-\infty;1]$ monoton steigend.

Die Funktion f ist im Intervall $I_2 = [1;3]$ monoton fallend.

Die Funktion f ist im Intervall $I_3 = [3;\infty[$ monoton steigend.

Für strenge Monotonie verändert sich die Lösung wie folgt:

Die Funktion f ist im Intervall $I_1 =]-\infty;1[$ streng monoton steigend.

Die Funktion f ist im Intervall $I_2 =]1;3[$ streng monoton fallend.

Die Funktion f ist im Intervall $I_3 =]3;\infty[$ streng monoton steigend.

Hinweis: In der Aufgabenstellung war kein Nachweis des Monotonieverhaltens gefordert. Dies ist an der Aufgabenstellung „Geben Sie an“ erkennbar. Wenn die Formulierung in der Aufgabenstellung aber beispielsweise „Untersuchen Sie das Monotonieverhalten …“ oder „Beurteilen Sie das Monotonieverhalten …“ lautet, so ist die Angabe des Monotonieverhaltens aufgrund der visuellen Untersuchung bzw. Beurteilung des Funktionsgraphen unzureichend.

In diesen Fällen kann das Monotonieverhalten stets durch Abarbeitung folgender Schritte erreicht werden:

Schritt 1: Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Schritt 2: Berechnen Sie die Nullstellen der Ableitungsfunktion.

Schritt 3: Zerlegen Sie die Ableitungsfunktion in Linearfaktoren.

Schritt 4: Erstellen Sie eine Vorzeichentabelle.

Schritt 5: Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion f an, indem Sie die Vorzeichentabelle interpretieren.